Г. Р. Галиулина, Е. Р. Садыкова
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
galiulina.guzal@mail.ru

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В математике тема “Неравенства” занимает одно из важных мест. В школе дети начинают изучать эту тему уже в начальных классах, где они знакомятся со свойствами неравенств и методами их решения в простейших случаях. Решение задач с помощью неравенств используется в каждой области математики: в алгебре, в геометрии, в теории вероятностей, в математической физике и других дисциплинах. На практике учащиеся сталкиваются с тем, что некоторые задачи невозможно решить стандартным способом, то есть могут применяться замечательные неравенства, такие как неравенства Коши, Бернулли, Коши–Буняковского.

В школьном курсе математики рассматриваются различные неравенства. Многие из них основаны на очень простом неравенстве о средних, появившемся еще в древние времена: $\frac{1}{2}(a+b) \geqslant \sqrt{ab}$, где $a, b > 0$.

Известно, что великий французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857) в начале XIX века занимался обобщением этого неравенства. Самым интересным оказалось обобщение, которое показано в виде следующей теоремы.

Теорема (Неравенство Коши). *Среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел:* $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \geqslant \sqrt{a_1 a_2 ... a_n}$, где $a_1, a_2, ..., a_n > 0$.

Равенство в неравенстве Коши достигается, когда все участвующие в нём числа одинаковы.

С помощью неравенства Коши можно находить наибольшее и наименьшее некоторых выражений. Например, если сумма положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ равна a, то произведение этих чисел принимает наибольшее значение при $a_1 = a_2 = = ... = a_n = \frac{a}{n}$ и это наибольшее значение равно $(\frac{a}{n})^n$. Если произведение положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ равно b, то их сумма принимает наименьшее значение при $a_1 = a_2 = ... = = a_n = \sqrt[n]{b}$, и это значение равно $n \cdot \sqrt[n]{b}$.

Следующее неравенство, которое представляет особый интерес и часто применяется при решении задач – это неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad x \geqslant -1, \quad n \geqslant 0.$$

Равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда n=1 или x=0.

Применяя неравенство Бернулли, решим уравнение: $\sqrt[7]{1\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[7]{1-\sqrt{1-x^2}} = 2$. Имеем

$$(1+\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{7}}+(1-\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{7}} \leqslant 1+\frac{1}{7}\sqrt{1-x^2}+1-\frac{1}{7}\sqrt{1-x^2} = 2.$$

Равенство возможно лишь при $\sqrt{1-x^2} = 0$, т. е. $x = \pm 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = \pm 1$ – корни уравнения.

Одним из красивейших неравенств является неравенство Коши–Буняковского: для любых чисел $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + .. + a_n^2)(b_1^2 + .. + b_n^2).$$

Докажем, что для любого допустимого значения x выполнится неравенство $\sqrt{2x+7}+2\sqrt{3+5x}+3\sqrt{4-7x} \leqslant 14$. Применим неравенство Коши–Буняковского, которое дает для любого допустимого значения x соотношение:

$$\sqrt{2x+7} + 2\sqrt{3+5x} + 3\sqrt{4-7x} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(\sqrt{2x+7})^2 + (\sqrt{3+5x})^2 + (\sqrt{4-7x})^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2} = 14.$$

В заключение отметим, что материал о замечательных неравенствах полезен при решении заданий единого государственного экзамена и задач повышенного уровня сложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомонов С. А. *Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: 10 – 11 классы. Учебное пособие. 2-е изд.* – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.

2. Иванов О. А. *Элементарная математика для школьников, студентов, преподавателей.* – М.: МЦНМО, 2009. – 384 с.

3. Коровкин П. П. *Неравенства.* – М.: Наука, 1983. – 56 с.

4. Седракян Н. М., Авоян А. М. *Неравенства. Методы доказательства.* – М.: Физматлит, 2002.

Л. И. Гафиятуллина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

gafiyat@gmail.com

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ПОЛИА–СЕГЁ И МАКАИ ДЛЯ ЕВКЛИДОВОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Ω – односвязная область на комплексной плоскости, $\rho(z, \partial\Omega)$ – расстояние от точки z до границы $\partial\Omega$ области Ω, $\rho(\Omega)$ – радиус максимального вписанного в область Ω круга, $A(\Omega)$ – площадь области Ω. Физический функционал

$$\mathrm{P}(\Omega) := 2 \iint\limits_{\Omega} u(z, \Omega)\, dA \tag{1}$$